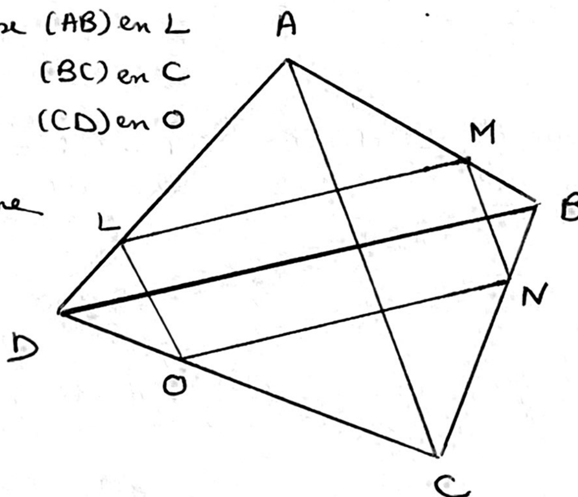
Intérêt de la notion de vecteurs et du Th. de Thalès

(Réf. Pythagore 5ème, 1991 }, ex 43 p167)

Soit ABCD un quadrilatère.
Soit $M \in]AB[$.

La parall. à (BD) passant par M coupe (AB) en L
" (AC) " M " (BC) en C
" (BD) " N " (CD) en O

Mq LMNO est un parallélogramme



- Solution utilisant Thalès et sa réciproque :

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DL}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DO}} \Rightarrow (LO) // (AC)$$

réc. Thalès

donc $(LO) // (AC) // (MN)$. Comme $(LM) // (BD) // (ON)$ par const. (...)

- Maquillage en termes de vecteurs (idée : Thalès)

Si $\vec{BA} = k\vec{BM}$, compte tenu des droites parallèles on obtient $\vec{BC} = k\vec{BN}$, puis $\vec{DC} = k\vec{DO}$ (1). D'autre part $\vec{BA} = k\vec{BM} \Rightarrow \vec{DA} = k\vec{DL}$ (2). Donc

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \vec{AC} = k\,\vec{LO}$$

Finalement, comme $\vec{AC} = k\vec{MN}$, on trouve $\vec{MN} = \vec{LO}$ □

- ~~Soit~~ Mq ABCD et le parall. LMNO ont même cdg ssi ABCD est ~~ABCD est~~ un parallélogramme.

Soit G le cdg de ABCD : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$

$$\begin{cases} M \text{ bary de } A(1), B(k) \Rightarrow \vec{GM} = \dfrac{\vec{GA} + k\vec{GB}}{1+k} \\ L \text{ bary de } A(1), D(k) \Rightarrow \vec{GL} = \dfrac{\vec{GA} + k\vec{GD}}{1+k} \\ N \text{ bary de } C(1), B(k) \Rightarrow \vec{GN} = \dfrac{\vec{GC} + k\vec{GB}}{1+k} \\ O \text{ bary de } C(1), D(k) \Rightarrow \vec{GO} = \dfrac{\vec{GC} + k\vec{GD}}{1+k} \end{cases}$$

d'où

$$\vec{GL}+\vec{GM}+\vec{GN}+\vec{GO} = \frac{2}{1+k}\left(\vec{GA}+\vec{GC}+k\,\vec{GB}+k\,\vec{GD}\right)$$

$$= \frac{2}{1+k}(k-1)\left(\vec{GB}+\vec{GD}\right)$$

Ainsi

G isobary de LMNO $\Leftrightarrow \vec{GB}+\vec{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{GA}+\vec{GC}=\vec{0} \\ \vec{GB}+\vec{GD}=\vec{0} \end{cases} \Rightarrow$ [AC] et [BD] se coupent en leur milieu



□